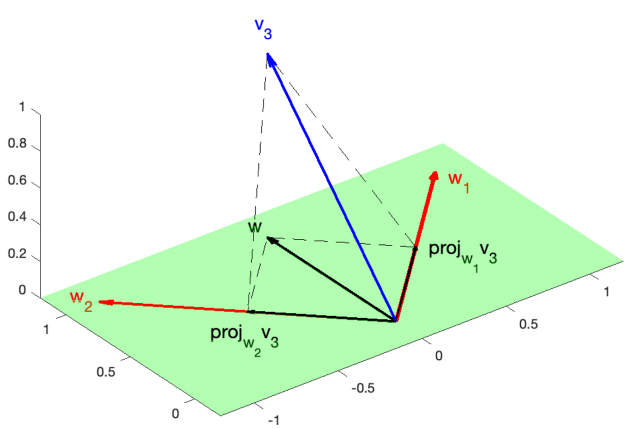
Universidad Simón Bolívar

MA-1116

RECOPILACIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS III



Recopilado, resuelto y tipeado en LaTeX

José A. Da Silva R.

Febrero 2021

Índice General

Cuando muere, todo el mundo debe dejar algo detrás, decía mi abuelo. Un hijo, un libro, un cuadro, una casa, una pared levantada o un par de zapatos. O un jardín plantado. Algo que tu mano tocará de un modo especial, de modo que tu alma tenga algún sitio a donde ir cuando tú mueras, y cuando la gente mire ese árbol, o esa flor, que tú plantaste, tú estarás allí. No importa lo que hagas -decía-, en tanto que cambies algo respecto a como era antes de tocarlo, convirtiéndolo en algo que sea como tú después de que separes de ellos tus manos. La diferencia entre el hombre que se limita a cortar el césped y un auténtico jardinero está en el tacto. El cortador de césped igual podría no haber estado allí, el jardinero estará allí para siempre.

Fahrenheit 451
Ray Bradbury

1 Motivación

Mi motivación en la realización de todas las guías de ejercicios que encontrarán de mi autoría recae sobre el gran amor que le tengo a mi alma mater, la Universidad Simón Bolívar. A mediados de mi carrera universitaria sabía que no quería irme de los pasillos de la USB sin dejarle algo de mí, como ella lo había hecho conmigo.

De ahí nace este gran proyecto personal de transcribir todos esos ejercicios, notas, procedimientos, análisis, creación de programas numéricos, entre otros; que recibí de mis grandes maestros y los que son de mis propias manos, con el fin de ser un material de estudio para los venideros estudiantes en su camino por el mundo de la excelencia de la USB. A través de estos documentos, busco ayudar a mi universidad a seguir siendo un atractivo para los estudiantes regulares y aquellas personas que quieran trabajar por ella.

¿Por qué? Porque las universidades son fuente de conocimiento y, si es bien conducido este gran poder, nos separará de la barbarie e ignorancia que intentan destruir fervientemente a la primera desde hace bastante tiempo.

A pesar de las dificultades que supone estudiar en una universidad pública venezolana, me encontré en los salones de clases a increíbles compañeros que compartíamos el mismo sueño y a excelentes maestros que eternamente estaremos agradecidos con la dedicación, compromiso, tiempo y paciencia al mostrarnos el camino del conocimiento. En las dependencias administrativas, encontré un personal que, a pesar que su labor es "invisible" en nuestro día a día de estudiantes universitarios, hacen todo lo posible para que la universidad sea un sistema interconectado y funcione de la mejor manera. Y, a todo el personal de transporte y limpieza, que representan los pequeños pero importantes engranajes de un gran sistema como la USB.

Ninguno de ellos se les da una cantidad remotamente similar a lo que debería atribuírsele económicamente por su gran trabajo y esfuerzo diario y, aún así, estuvieron presente para que cada uno de nosotros tuviese un lugar en el salón de clases, en las agrupaciones estudiantiles, en la soñada graduación, entre otros. Por eso, más en estos momentos, es donde la USB necesita la ayuda de su gente.

2 Sistemas de Ecuaciones

1. *Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución: Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ es el vector incógnita y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vector. Usamos el método de Gauss-Jordan para hallar la solución al sistema homogéneo. Para ello construimos la matriz aumentada $(A\,|\,\mathbf{b})$ del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{31}{2} & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - 4F_1]{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \to F_4 - 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 4F_3]{F_2 \to F_2 + \frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{137}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \to \frac{2}{137}F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + \frac{2}{31}F_4]{F_2 \to F_2 + 4F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + \frac{2}{7}F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0}$$

Nota: Por tratarse de un sistema homogéneo, las únicas posibles soluciones son: solución trivial, es decir, el vector de incógnitas $\vec{x} = \vec{0}$, o soluciones infinitas.

2. *Hallar los valores de a y b para que el sistema sea:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (a+1)x_3 = b - 4 \end{cases}$$

(a) *Consistente*

(b) *Inconsistente*

(c) *Infinitas soluciones*

Solución: Observamos que tenemos un sistema de ecuaciones de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2 & a+1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ es el vector incógnita y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b-4 \end{pmatrix}$ un vector.

Construimos la matriz aumentada $(A\,|\,\mathbf{b})$ del sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a+1 & b-4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & a-3 & b-4 \end{array}\right) \quad \blacklozenge$$

- **Caso 1:** Si $\mathbf{a = 2}$ entonces, de la matriz aumentada $\blacklozenge$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & b-4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b-4 \\ 0 & -2 & -1 & b-4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b-4 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{4-b}{2} \end{array}\right)$$

  - De la fila 2:

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{4-b}{2} \Longrightarrow \boxed{x_2 = \frac{4-b}{2} - \frac{1}{2}x_3}$$

  - De la fila 1:

$$x_1 + x_3 = b - 4 \Longrightarrow \boxed{x_1 = (b-4) - x_3}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene **infinitas soluciones** de la forma:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} b-4-x_3 \\ \dfrac{4-b}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-4 \\ \dfrac{4-b}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = (b-4)\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = (b-4)\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R}}$$

- **Caso 2:** Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{2}$, la matriz aumentada ♦ nos queda de la siguiente manera:

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{a-2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & a-3 & b-4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_2]{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & b-4 \end{array}\right) \blacktriangle$$

- **Caso 2.1:** Si $\mathbf{a} = \mathbf{3}$, entonces la matriz ▲ nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3-3) & b-4 \end{array}\right)$$

  - *Caso 2.1.1:* Si $(\mathbf{b}-\mathbf{4}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{b} \neq \mathbf{4}$ el sistema es **inconsistente**
  - *Caso 2.1.2:* Si $\mathbf{b}-\mathbf{4} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{4}$ el sistema tiene **soluciones infinitas** de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- De la fila 1: $x_1 + 2x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = -2x_3$
- De la fila 2: $x_2 = 0$

Luego, el vector solución es:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{x} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R}}$$

- **Caso 2.2:** Si $\mathbf{a \neq 3 \wedge a \neq 2}$ entonces la matriz ▲, nos queda:

$$\xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{a-3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-4}{a-3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\left(\dfrac{b-4}{a-3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-4}{a-3} \end{array}\right)$$

De esta última matriz aumentada encontramos que:

$$x_1 = -2\left(\frac{b-4}{a-3}\right),\ x_2 = 0\,,\ x_3 = \frac{b-4}{a-3}$$

Por lo tanto, el sistema tiene <u>**solución única**</u> y es de la forma:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2\left(\dfrac{b-4}{a-3}\right) \\ 0 \\ \left(\dfrac{b-4}{a-3}\right) \end{pmatrix} \implies \boxed{\vec{x} = \frac{4-b}{a-3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

3. *Halle los valores de β para que el sistema de ecuaciones tenga:*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (\beta^2 - 3)z = \beta \end{cases}$$

(a) *Consistente*

(b) *Inconsistente*

(c) *Infinitas soluciones*

Solución: Veamos que tenemos un sistema de ecuaciones de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ siendo A la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \beta^2 - 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ el vector incógnita y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix}$ es el vector de coeficientes.

Construimos la siguiente matriz aumentada $(A\,|\,\mathbf{b}\,)$ y aplicamos el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \beta^2-3 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2-4 & \beta-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\to F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2-4 & \beta-2 \end{array}\right) \clubsuit$$

- **Caso 1:** Si $\beta = \mathbf{2}$, la matriz $\clubsuit$ nos queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - <u>De la fila 1:</u> $x + z = 1 \longrightarrow x = 1 - z$
  - <u>De la fila 2:</u> $y = 1$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene **infinitas soluciones** de la forma:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-z \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } z \in \mathbb{R}}$$

- **Caso 2:** Si $\beta = -\mathbf{2}$, entonces la matriz $\clubsuit$ nos queda como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

  - De la fila 3 obtenemos el siguiente resultado:

    $$0x + 0y + 0z = -4 \Longrightarrow 0 = -4$$

    Luego, podemos concluir que el sistema **no tiene solución**.

- **Caso 3:** Si $\beta \neq \pm\mathbf{2}$, la matriz ♣ queda como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2-4 & \beta-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{\beta^2-4}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\beta+2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\beta+1}{\beta+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\beta+2} \end{array}\right)$$

Luego, el sistema de ecuaciones tiene **solución única** y es:

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta+1}{\beta+2} \\ 1 \\ \dfrac{1}{\beta+2} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}}$$

4. *Halle los valores de las constantes* **a** , **b** *para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga:*

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + w = b \\ x + y + z = 1 \\ x - aw = 1 \end{cases}$$

(a) *Consistente*

(b) *Inconsistente*

(c) *Infinitas soluciones*

Solución: Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ el vector incógnita y sea $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ el vector de coeficientes.

Veamos que tenemos un sistema de ecuaciones de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$. Construimos la matriz aumentada $(A|\mathbf{b})$ del sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \longrightarrow F_3 - 3F_1]{F_2 \longrightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4 \longrightarrow F_4 - F_1]{F_2 \longrightarrow -F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \longrightarrow F_3 + F_2]{F_1 \longrightarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1-b \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \longrightarrow -\frac{1}{3}F_3]{F_4 \longrightarrow F_4 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & 1-b \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow -F_4]{F_2 \longrightarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2-4b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{array}\right) \bigstar$$

- **Caso 1:** Si $\mathbf{a} = -\mathbf{1}$, la matriz ★ queda como:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2-4b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

  - **Caso 1.1:** Si $b \neq 1$, entonces el sistema **no tiene solución**
  - **Caso 1.2:** Si $b = 1$, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones** de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2-4b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - **De la fila 1:** $x + w = 1 \longrightarrow x = 1 - w$
  - **De la fila 2:** $y - \frac{4}{3}w = -\frac{2}{3} \longrightarrow y = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}w$
  - **De la fila 3:** $z + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \longrightarrow z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}w$

Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones y son de la siguiente forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-w \\ -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}w \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w \\ \frac{4}{3}w \\ -\frac{1}{3}w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- **Caso 2:** Si $a \neq -1$, la matriz ★ nos queda como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{4}{3} & \dfrac{2-4b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \longrightarrow \frac{1}{a+1}F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{4}{3} & \dfrac{2-4b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{b+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-1}{a+1} \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \longrightarrow F_3 - \frac{1}{3}F_4]{F_2 \longrightarrow F_2 + \frac{4}{3}F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a-2ab-1}{a+1}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+ab+2}{a+1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-1}{a+1} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longrightarrow F_1 - F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{ab+1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a-2ab-1}{a+1}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+ab+2}{a+1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-1}{a+1} \end{array}\right)$$

Luego, el sistema de ecuaciones tiene **solución única** y es de la forma:

$$\boxed{\vec{x} = \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} ab+1 \\ \dfrac{2}{3}(a-2ab-1) \\ \dfrac{1}{3}(a+ab+2) \\ b-1 \end{pmatrix}}$$

3 Determinante de una Matriz

5. *Halle el determinante de la matriz G dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Para hallar el determinante de G procederemos con la expansión por cofactores. Para ello, tomaremos a la 3ra fila como fila pivote. Así:

$$|G| = \sum_{n=1}^{4} a_{3k}A_{3k} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

donde a_{3k} y A_{3k} son los *k-ésimos* elementos y cofactores de la tercera fila, respectivamente. Calculamos los cofactores:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}}_{D_1} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}}_{D_2} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{D_3}$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{D_4}$$

Procedemos a calcular los sub-determinantes resultantes D_1 , D_3 , D_4 de la misma manera. **¿Por qué no calculamos** D_2**?** Porque $a_{32} = 0$. Así, calculamos :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \sum_{n=1}^{3} b_{1k}B_{1k} = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13}$$

$$B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=(1)(2)-(-2)(5)=2+10=12$$

$$B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-1\left[(3)(2)-(-2)(2)\right]=-1\left[6+4\right]=-10$$

$$B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=(3)(5)-(1)(2)=15-2=13$$

$$\boxed{D_1=(-1)(12)+(2)(-10)+(1)(13)=-12-20+13=-19}$$

Ahora, calculamos D_3

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 6 & 2 & 2\end{vmatrix}=\sum_{n=1}^{3}c_{1k}C_{1k}=c_{11}C_{11}+c_{12}C_{12}+c_{13}C_{13}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=(3)(2)-(-2)(2)=6+4=10$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & 2\end{vmatrix}=-1\left[(4)(2)-(-2)(6)\right]=-1\left[8+12\right]=-20$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 6 & 2\end{vmatrix}=(4)(2)-(3)(6)=8-18=-10$$

$$\boxed{D_3=(3)(10)+(-1)(-20)+(1)(-10)=30+20-10=40}$$

Luego, procedemos a hallar D_4

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \sum_{n=1}^{3} e_{1k}E_{1k} = e_{11}E_{11} + e_{12}E_{12} + e_{13}E_{13}$$

$$E_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (2)(1) = 15 - 2 = 13$$

$$E_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -1\,[(4)(5) - (1)(6)] = -1\,[20 - 6] = -14$$

$$E_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (3)(6) = 8 - 18 = -10$$

$$\boxed{D_4 = (3)(13) + (-1)(-14) + (2)(-10) = 39 + 14 - 20 = 33}$$

Así, tenemos que:

$$A_{31} = (-1)^4(-19) = -19 \longrightarrow \boxed{A_{31} = -19}$$

$$A_{33} = (-1)^6(40) = 40 \longrightarrow \boxed{A_{33} = 40}$$

$$A_{34} = (-1)^7(33) = -33 \longrightarrow \boxed{A_{34} = -33}$$

Finalmente, obtenemos que el determinante de G es:

$$|G| = (-1)(-19) + (0)A_{32} + (2)(40) + (3)(-33) = 19 + 80 - 99 = 0$$

$$\boxed{|G| = 0}$$

<u>Nota:</u> Como el determinante de la matriz G es igual a 0, esto es $|G| = 0$, entonces podemos concluir que la matriz no es invertible y viceversa. Es decir, si la matriz G no es invertible entonces $|G| = 0$. Esto quiere decir que, si hubiesemos podido "detectar" que la matriz G no era invertible a "simple vista", nos hubiesemos ahorrado todo el cálculo anterior.

Vease que si tomamos las filas $F_1\, F_2\, y\, F_3$ y las sumamos obtenemos las fila F_4. Es decir:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = F_4$$

Por lo tanto, como la fila F_4 de la matriz G es combinación lineal de las filas F_1 , F_2 , F_3, entonces podemos concluir que la matriz G no es invertible y, por lo tanto, su determinante es 0. Esto es:

$$\boxed{|G| = 0}$$

6. *Halle los valores de α para que la matriz A sea invertible, donde A es la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

Solución: Si la matriz A es invertible entonces su determinante es distinto de 0, esto es $|A| \neq 0$. Entonces, nuestro objetivo será hallar los valores de α tales que $|A(\alpha)| \neq 0$ (el determinante es una **función** de la constante α). Para hallar el determinante de A procederemos con la expansión por cofactores, tomando a la primera fila como fila pivote. Así:

$$|A| = \sum_{n=1}^{3} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

donde a_{1k} y A_{1k} son los *k-ésimos* elementos y cofactores de la primera fila, respectivamente. Procedemos a hallar los cofactores A_{1k}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{vmatrix} = (2)(\alpha + 7) - (3)(\alpha + 3) = 2\alpha + 14 - 3\alpha - 9 = 5 - \alpha$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+7 \end{vmatrix} = -1\left[(1)(\alpha+7)-(3)(2-\alpha)\right] = -1\left[\alpha+7-6+3\alpha\right] = -1-4\alpha$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha+3 \end{vmatrix} = (1)(\alpha+3)-(2)(2-\alpha) = \alpha+3-4+2\alpha = 3\alpha-1$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz A

$$|A| = (\alpha)(5-\alpha)+(\alpha-1)(-1-4\alpha)+(\alpha+1)(3\alpha-1) = 5\alpha-\alpha^2-\alpha-4\alpha^2+1+4\alpha+3\alpha^2-\alpha+3\alpha-1$$

$$|A(\alpha)| = 10\alpha - 2\alpha^2$$

Entonces, para que la matriz A sea invertible entonces $|A| \neq 0$. Esto es:

$$|A(\alpha)| = 2\alpha(5-\alpha) \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 5$$

Finalmente, para que la matriz A sea invertible α debe tomar cualquier valor distinto al 0 y al 5. Es decir:

$$\boxed{\alpha = \Re - \{0,5\}}$$

7. *Sean $A, B, C \in M_{4x4}(\mathbb{R})$, todas invertibles, tal que $|A| = \dfrac{1}{4}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$*

Si $C^{-1}(C^{-1}BA)^t = I_4$, hallar $|C|$

Solución: Por hipótesis tenemos que: $C^{-1}(C^{-1}BA)^t = I_4$. Luego, debe cumplirse que:

$$|C^{-1}(C^{-1}BA)^t| = |I_4| \Longrightarrow |C^{-1}||(C^{-1}BA)^t| = 1$$

Así:

$$|C^{-1}||(C^{-1}BA)^t| = 1 \Longrightarrow \frac{1}{|C|}|C^{-1}BA| = 1 \Longrightarrow \frac{1}{|C|}|C^{-1}||B||A| \Longrightarrow \left(\frac{1}{|C|}\right)^2 |B||A| = 1$$

$$\left(\frac{1}{|C|}\right)^2 |B||A| = 1 \Longrightarrow |C|^2 = |B||A| \Longrightarrow |C| = \pm\sqrt{|A||B|}$$

Ahora solo debemos hallar el $|B|$. Para ello, como se trata de una matriz de tamaño 4x4, utilizaremos la expansión por cofactores usando a la tercera fila como fila pivote. Así:

$$|B| = \sum_{n=1}^{4} a_{3k}A_{3k} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

Note que los elementos $a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$. Por lo tanto, solo nos interesará calcular el cofactor A_{33}

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{3} d_{1k}D_{1k} = d_{11}D_{11} + d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13}$$

Procedemos a calcular los determinantes E_{11} , E_{12} , E_{13}

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [(1)(1) - (1)(2)] = [1 - 2] = -1$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - [(1)(1) - (1)(1)] = -[1 - 1] = 0$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = [(1)(2) - (1)(1)] = [2 - 1] = 1$$

$$A_{33} = (1)(-1) + (2)(0) + (3)(1) = -1 + 3 = 2 \Longrightarrow A_{33} = 2$$

Así:

$$|B| = 0A_{31} + 0A_{32} + (8)(2) + 0A_{34} = 16 \Longrightarrow |B| = 16$$

Finalmente, tenemos que:

$$|C| = \pm\sqrt{|A||B|} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)(16)} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\boxed{|C| = \pm 2}$$

8. *Sea la matriz* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$, *con* $a, b > 0$. *Sea* $|A| = \dfrac{1}{4}$ *y una matriz* $B \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ *invertible. Si* $(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1} = I_4$, *entonces halle* $|B|$.

Solución: En primer lugar, hallaremos el determinante de la matriz C. Para ello, aplicaremos las propiedades conocidas de los determinantes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & b & b & 0 \end{vmatrix} = (a)(b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \longrightarrow F_4} |C| = (-1)(a)(b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3\longrightarrow F_3-F_1]{F_2\longrightarrow F_2-F_1} \quad |C| = -ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4\longrightarrow F_4+[F_2+F_3]} |C| = -ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|C| = -ab\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{\textbf{Diagonal superior}} = (-ab)\left[(1)(-1)(-1)(3)\right] = -3ab \Longrightarrow |C| = -3ab \neq 0 \quad \textbf{(Invertible)}$$

Por otra parte, tenemos que por hipótesis: $(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1} = I_4$

Entonces, también debe satisfacerse que: $|(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1}| = 1$

Así, usando las propiedades de los determinantes de matrices:

$$|(C^2A^{-1}B^{-1})^tB^{-1}| = 1 \Longrightarrow |(C^2A^{-1}B^{-1})^t||B^{-1}| = |C^2A^{-1}B^{-1}|\left(\frac{1}{|B|}\right) = |C^2||A^{-1}||B^{-1}|\left(\frac{1}{|B|}\right) = ...$$

$$... = |CC|\left(\frac{1}{|A|}\right)\left(\frac{1}{|B|}\right)\left(\frac{1}{|B|}\right) = |C|^2\frac{1}{|A|}\left(\frac{1}{|B|}\right)^2 = 1 \Longrightarrow |B|^2 = \frac{|C|^2}{|A|}$$

Sabiendo que $|A| = \dfrac{1}{4}$, $|C| = -3ab$ tenemos que:

$$|B|^2 = \frac{(-3ab)^2}{\frac{1}{4}} = 36a^2b^2 \Longrightarrow |B| = \pm\, 6ab$$

Finalmente:

$$\boxed{|B| = \pm\, 6ab}$$

4 Inversa de una Matriz

9. *Hallar la matriz inversa de la matriz E dada por:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Construimos la matriz aumentada $(A\,|\,\mathrm{I}_4)$ con la matriz identidad de tamaño 4x4. Luego, aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A para llevarla a su forma escanolada reducida, es decir, a la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \longrightarrow F_3 - F_1]{F_2 \longrightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \longrightarrow F_1 - F_2]{F_4 \longrightarrow F_4 - F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow F_4 - 2F_2]{F_3 \longrightarrow F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \longrightarrow -\frac{1}{3}F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \longrightarrow F_2 + 2F_3]{F_1 \longrightarrow F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 1 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4\longrightarrow F_4-6F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 1 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4\longrightarrow \frac{1}{3}F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 1 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\longrightarrow F_2+\frac{1}{3}F_4]{F_1\longrightarrow F_1-2F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{4}{9} & -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{4}{9} & \dfrac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\longrightarrow F_3+\frac{2}{3}F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{4}{9} & -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{4}{9} & \dfrac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{2}{9} & \dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz inversa de E es:

$$\boxed{E^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{9} & -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{4}{9} & \dfrac{1}{9} \\ -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{2}{9} & \dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{9} \\ -\dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

10. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3b \\ -\frac{1}{2} & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$*. Halle los valores de* a *,* b *tal que la matriz A sea invertible.*

Luego, con $a = 3$ *,* $b = \frac{1}{3}$ *halle la matriz inversa* A^{-1} *y, con ella, diga la solución del sistema*

$A\vec{x} = \vec{b}$*, con* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: Para que una matriz A sea invertible debe satisfacerse que $|A| \neq 0$. Entonces, tomamos la expansión por cofactores. Debemos preguntarnos que columna o fila seleccionar como pivote para realizar el cálculo del determinante. Veamos que podemos elegir cualquiera de las columnas y filas de la matriz A, excepto la primera columna y la cuarta fila ya que en ellas se encuentran elementos más de un elemento no nulo. Luego, por simplicidad, se escogerá a la fila 2 como la fila pivote. Así, tenemos que:

$$|A| = \sum_{n=1}^{4} a_{2k}A_{2k} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{21}A_{21}$$

$$|A| = (1)(-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix}}_{B_1} = (-1)\left[\sum_{n=1}^{3} b_{2k}B_{2k}\right] = -\left[\cancelto{0}{b_{21}}B_{21} + \cancelto{0}{b_{22}}B_{22} + b_{23}B_{23}\right]$$

$$|A| = -b_{23}B_{23} = -3b\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & a-2 \end{vmatrix} = -(3b)(-1)^{2+3}\left[(-2)(a-2) - (0)(0)\right] = -6b\,(a-2)$$

Así, tenemos que:

$$|A| = 6b\,(2-a)$$

Luego, para que la matriz sea invertible debemos garantizar que $|A| \neq 0$. Esto, nos lleva a que:

$$si \quad |A| = 6b\,(2-a) \neq 0 \Longrightarrow \; entonces \quad b \neq 0 \wedge a \neq 2$$

Finalmente:

$$\boxed{\text{La matriz A será invertible siempre y cuando } \; b \neq 0 \wedge a \neq 2}$$

Si $a = 3 \wedge b = \dfrac{1}{3}$, entonces tenemos la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz inversa de A, construimos la matriz aumentada $(A\,|\,\mathrm{I}_4)$ con la matriz identidad de tamaño 4x4 y aplicamos operaciones elementales de filas para reducirla a la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow -2F_4]{F_1 \longrightarrow \frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\dfrac{2}{3} & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow F_4 - F_1]{F_2 \longrightarrow F_2 - F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\dfrac{2}{3} & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & -2 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow F_4 - F_2]{F_1 \longrightarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \longrightarrow -\frac{1}{2}F_4]{F_2 \longrightarrow \frac{3}{2}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \longrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, tenemos que la matriz inversa A es:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

La solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ se halla mediante la expresión $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Luego, haciendo la multiplicación matricial tenemos:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

5 Desmotraciones

11. *Una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A^t = -A$. Demuestre que $\lambda(A - A^t)$, con $\lambda = ctte$, es antisimétrica.*

    Solución: Sea la matriz $B = \lambda(A - A^t)$. Si B es antisimétrica, entonces debe satisfacer que $B^t = -B$. Entonces, usando propiedades de las matrices transpuestas tenemos que:

$$B^t = (\lambda(A - A^t))^t = \lambda(A - A^t)^t = \lambda(A^t - (A^t)^t) = \lambda(A^t - A) = -\lambda(A - A^t) = -B$$

    Por lo tanto, tenemos que $B^t = -B$. Luego, B es una matriz antisimétrica. Finalmente, concluimos que:

$$\lambda(A - A^t) \quad \textbf{es una matriz antisimétrica}$$

12. *Sea la matriz $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada y antisimétrica. Demuestre que toda componente de la diagonal principal de la matriz A es cero.*

    Solución: Sea $A = (a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbb{R})$.
    Si la matriz A es antisimétrica entonces quiere decir que satisface $A^t = -A$. Esto es:

$$A^t = ((a_{ij}))^t = (a_{ji}) = -A = -(a_{ij}) = (-a_{ij}) \longrightarrow (a_{ji}) = (-a_{ij}) \quad i, j = 1, 2, 3, ..., n$$

$$A^t = -A \Longrightarrow \begin{cases} a_{ji} = -a_{ij} & i \neq j \\ a_{ii} = -a_{ii} & i = j \end{cases}$$

    De la segunda ecuación obtenemos que:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Longrightarrow 2a_{ii} = 0$$

$$\boxed{a_{ii} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n}$$

    Por lo tanto, la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se demuestra que **una matriz A cuadrada y antisimétrica tiene su diagonal principal nula**.

13. *Sean $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, ambas invertibles. Pruebe que:*

$$(ABA^{-1} + C^t)^t = (A^t)^{-1}B^tA^t + C$$

Solución: Usando las propiedades de la matriz transpuesta tenemos:

$$(ABA^{-1} + C^t)^t = (A(BA^{-1}))^t + (C^t)^t = (BA^{-1})^tA^t + C = (A^{-1})^tB^tA^t + C = (A^t)^{-1}B^tA^t + C$$

$$\boxed{(ABA^{-1} + C^t)^t = (A^t)^{-1}B^tA^t + C}$$

14. *Sean $A, B, X \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, todas invertibles. Si $A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$, halle una expresión para la matriz X.*

Solución: Por hipótesis tenemos que: $A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$. Luego, si manipulamos la expresión obtendremos:

$$A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2 \Longrightarrow A^{-1}X^{-1}B^{-1} = (A^{-1}B^3)(A^{-1}B^3)$$

Si multiplicamos por la izquierda por la matriz A:

$$A^{-1}X^{-1}B^{-1} = (A^{-1}B^3)(A^{-1}B^3) \Longrightarrow AA^{-1}X^{-1}B^{-1} = AA^{-1}B^3A^{-1}B^3 \Longrightarrow I_nX^{-1}B^{-1} = I_nB^3A^{-1}B^3$$

$$I_nX^{-1}B^{-1} = I_nB^3A^{-1}B^3 \Longrightarrow X^{-1}B^{-1} = B^3A^{-1}B^3$$

Luego, si multiplicamos por la derecha por la matriz B:

$$X^{-1}B^{-1} = B^3A^{-1}B^3 \Longrightarrow X^{-1}B^{-1}B = B^3A^{-1}B^3B \Longrightarrow X^{-1}I_n = B^3A^{-1}B^4$$

$$X^{-1} = B^3A^{-1}B^4$$

Ahora, si multiplicamos por la izquierda por la matriz X (llegaremos al mismo resultado si lo hace por la derecha, es indiferente):

$$X^{-1} = B^3A^{-1}B^4 \Longrightarrow XX^{-1} = XB^3A^{-1}B^4 \Longrightarrow I_n = XB^3A^{-1}B^4$$

Multiplicamos por la derecha por $(B^{-1})^4$:

$$I_n = XB^3A^{-1}B^4 \Longrightarrow I_n(B^{-1})^4 = XB^3A^{-1}B^4(B^{-1})^4 \Longrightarrow (B^{-1})^4 = XB^3A^{-1}(BB^{-1})^4$$

$$(B^{-1})^4 = XB^3A^{-1}(BB^{-1})^4 \Longrightarrow (B^{-1})^4 = XB^3A^{-1}(I_n)^4 \Longrightarrow (B^{-1})^4 = XB^3A^{-1}$$

Multiplicamos por la derecha por A:

$$(B^{-1})^4 = XB^3A^{-1} \Longrightarrow (B^{-1})^4A = XB^3A^{-1}A \Longrightarrow (B^{-1})^4A = XB^3I_n \Longrightarrow (B^{-1})^4A = XB^3$$

Finalmente, si multiplicamos por la derecha por $(B^{-1})^3$:

$$(B^{-1})^4A = XB^3 \Longrightarrow (B^{-1})^4A(B^{-1})^3 = XB^3(B^{-1})^3 \Longrightarrow (B^{-1})^4A(B^{-1})^3 = X(BB^{-1})^3$$

$$\Longrightarrow (B^{-1})^4A(B^{-1})^3 = X(BB^{-1})^3 \Longrightarrow (B^{-1})^4A(B^{-1})^3 = X(I_n)^3 \Longrightarrow (B^{-1})^4A(B^{-1})^3 = X$$

Luego, llegamos a una expresión para la matriz X:

$$\boxed{X = (B^{-1})^4A(B^{-1})^3}$$

15. *Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ e invertible. Demostrar que $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$*

Solución: Si la matriz A es invertible, entonces ella satisface la siguiente igualdad:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

Luego, también debe cumplirse que:

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)\right|$$

Veamos el lado derecho de la igualdad:

$$\left|\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)\right| = \left|\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{1n}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{2n}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{3n}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & \frac{A_{n3}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \underbrace{\frac{1}{|A|}\frac{1}{|A|}\frac{1}{|A|}\cdots\frac{1}{|A|}}_{n\,veces}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n |\mathrm{Adj}(A)|$$

Luego:

$$\left|\frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)\right| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n |\mathrm{Adj}(A)|$$

Entonces, tenemos que:

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)\right| \Longrightarrow \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n |\mathrm{Adj}(A)| \Longrightarrow |A|^{n-1} = |\mathrm{Adj}(A)|$$

$$\boxed{|A|^{n-1} = |\mathrm{Adj}(A)|}$$

16. *Sean las matrices invertibles $A, B, C \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. ¿Es la matriz $D = ABC$ invertible?*

Solución: Para probar que la matriz D es invertible, debemos verificar que se cumple:

$$DD^{-1} = I_n$$

Entonces, usando propiedades de las matrices inversas:

$$DD^{-1} = (ABC)(ABC)^{-1} = ABC\left[A(BC)\right]^{-1} = ABC(BC)^{-1}A^{-1} = ABCC^{-1}B^{-1}A^{-1} = ...$$
$$... = AB\left[CC^{-1}\right]B^{-1}A^{-1} = ABI_nB^{-1}A^{-1} = A\left[BB^{-1}\right]A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Por lo tanto, se demostró que:

$$\boxed{DD^{-1} = I_n}$$

Es decir, la matriz D es **invertible**.

17. *¿Es cierto* $AB = BA\,, \quad \forall\, A\,,\, B\, \in M_{nxn}(\mathbb{R})$*?*

Solución: **FALSO**. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $AB \neq BA$; por lo tanto, la hipótesis es **FALSA**.

18. *Sean* $C, D \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ *tal que* $CD = DC$. *¿Es cierto que* CD *es simétrica?*

Solución: **FALSO**. Sean las siguientes matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{donde} \quad CD = DC$$

Luego:

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq (CD)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, vemos que:

$$CD \neq (CD)^t$$

Entonces, podemos concluir que la hipótesis es **FALSA**.

6 Adjunta de una Matriz

19. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *halle* $Adj(A)$ *y* A^{-1}.

Solución: Hallamos la matriz de cofactores de la matriz A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,[(1)(1) - (1)(2)] = 1 - 2 = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\,[(1)(1) - (1)(0)] = -1\,(1 - 0) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\,[(1)(2) - (1)(0)] = 2 - 0 = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,[(1)(1) - (0)(2)] = -1\,(1 - 0) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,[(1)(1) - (0)(0)] = 1 - 0 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\,[(1)(2) - (1)(0)] = -1\,(2 - 0) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,[(1)(1) - (0)(1)] = 1 - 0 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\left[(1)(1) - (0)(1)\right] = -1\,(1-0) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\left[(1)(1) - (1)(1)\right] = 1 - 1 = 0$$

Así, la matriz de cofactores de la matriz A es:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\boxed{Adj(A) = [Cof(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \longrightarrow F_2 - F_1} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \longrightarrow F_2}$$

$$|A| = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\textbf{Diagonal superior}} = -1\left[(1)(2)(1)\right] = -2 \Longrightarrow |A| = -2$$

Así, tenemos que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

20. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. *Sea* $A = |A|C^{-1}$, *donde* $C \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ *y es invertible. Hallar la matriz C.*

Solución: A simple vista, parece ser que tendríamos que hallar la matriz C a partir de su inversa y eso implica un cálculo exhaustivo. Luego, si manipulamos la expresión que relaciona a la matriz A con la matriz C nos daremos cuenta de lo siguiente:

$$A = |A|C^{-1} \Longrightarrow AC = |A| \Longrightarrow C = A^{-1}|A| \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}C$$

pero, sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$

por lo tanto, tenemos que $C = Adj(A)$

Entonces, procedemos a calcular la matriz $Adj(A)$. Para ello, hallamos los cofactores de la matriz A

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (1)\left[(1)(7) - (-1)(5)\right] = 7 + 5 = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(0)(7) - (-1)(3)\right] = (-1)(0+3) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (1)\left[(0)(5) - (1)(3)\right] = 0 - 3 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(4)(7) - (3)(5)\right] = (-1)(28 - 15) = -13$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (1)\left[(2)(7) - (3)(3)\right] = 14 - 9 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\left[(2)(5) - (4)(3)\right] = (-1)(10 - 12) = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)\left[(4)(-1) - (3)(1)\right] = -4 - 3 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\left[(2)(-1) - (3)(0)\right] = (-1)(-2 - 0) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)\left[(2)(1) - (4)(0)\right] = 2 - 0 = 2$$

Así, la matriz de cofactores de la matriz A es:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz C, que en este caso resultó ser la matriz adjunta de A, es igual a:

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

7 Geometría en $\mathbb{R}^3$

21. *Dados los puntos $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (-2, 2, 3)$, $D = (1, -1, 2)$.*

   (a) *Halle la ecuación de la recta L_1 que contiene a los puntos A y B*

   (b) *Halle la ecuación de la recta L_2 que es paralela a L_1 y pasa por C*

   (c) *Halle la distancia de L_1 al punto C*

   (d) *Hallar una recta perpendicular común a L_1 y L_3 y que pase por D, donde L_3 es la recta que pasa por C y D*

Solución: *(a)* Primero, hallamos el vector director de la recta L_1, el cuál será $\vec{X_{L_1}} = A - B$ o $\vec{X_{L_1}} = B - A$. Así:

$$\vec{X_{L_1}} = (1, 2, -1) - (2, 1, 1) = (-1, 1, -2)$$

Luego, con el punto A o B, procedemos a construir la ecuación canónica de la recta L_1:

$$\boxed{L_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(-1, 1, -2) \, , \, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

(b) Para la segunda parte, tenemos que el vector director de la recta L_2 es paralelo al de L_1. Esto quiere decir que $\vec{X_{L_1}} = \vec{X_{L_2}}$. Procediendo de la misma forma que en el anterior apartardo, tenemos:

$$\boxed{L_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y, z) = (-2, 2, 3) + \lambda(-1, 1, -2) \, , \, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

(c) Tenemos la siguiente situación INSERTE DIBUJO Definimos $\vec{u} = C - A = (-2, 2, 3) - (1, 2, -1) = (-3, 0, 4)$ y $\vec{v} = \vec{X_{L_1}} = (-1, 1, 2)$. Luego, calculamos la proyección de $\vec{u}$ con respecto a $\vec{v}$

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{(-3, 0, 4) \cdot (-1, 1, -2)}{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}(-1, 1, -2) = -\frac{5}{6}(-1, 1, -2) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\vec{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = (-3, 0, 4) - \left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{23}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{3}\right)$$

Finalmente, la distancia entre el punto C y la recta L_1

$$d = |\vec{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}| = \sqrt{\left(-\frac{23}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{750}}{6} = \frac{5\sqrt{30}}{6}$$

$$\boxed{d = \frac{5\sqrt{30}}{6}}$$

(d) Para hallar una recta perpendicular a L_1 y L_3, necesitamos hallar un vector director que también lo sea. Primero, construiremos la ecuación de la recta L_3

$$\vec{X_{L_3}} = D - C = (1,-1,2) - (-2,2,3) = (3,-3,-1)$$

$$L_3 : \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(3,-3,-1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Sabemos que el producto cruz entre dos vectores dará como resultado uno que sea perpendicular a ambos. Esto cumple con nuestros propósitos. Necesitamos fabricar un vector director que sea perpendicular a los de las rectas L_1 y L_3. Así

$$\vec{X_{L_4}} = \vec{X_{L_3}} \times \vec{X_{L_1}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7\,\hat{\mathbf{i}} + 7\,\hat{\mathbf{j}}$$

Finalmente, la recta L_4 es:

$$\boxed{L_4 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(7,7,0)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

22. *Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones simétricas*

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{2}$$

y es perpendicular al plano de ecuación $\pi_1 \ : \ 3x + 2y - z = 5$

Solución: Si el plano π contiene a la recta dada, entonces su vector director y el punto por el que pasa son parte del plano. Así:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \lambda \implies x = 2\lambda + 1 \\ -\dfrac{y+2}{3} = \lambda \implies y = -3\lambda - 2 \\ \dfrac{z-2}{2} = \lambda \implies z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

$$L_1 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) = (1,-2,2) + \lambda(2,-3,2)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$P = (1,-2,2)\,,\ \vec{X_{L_1}} = (2,-3,2)$$

Por otra parte, el plano π_1 tiene como vector normal:

$$\vec{n_{\pi_1}} = (3, 2, -1)$$

Veamos que para construir la ecuación del plano π necesitamos un punto que pertenezca y un vector normal a dicho plano.
Como la recta pertenece al plano, entonces el punto P también. Si el plano es perpendicular a π_1 y además contiene a una recta con vector director $\vec{X_{L_1}}$, entonces el vector normal $\vec{n_\pi}$ debe ser tanto perpendicular al primero como al segundo. Usando la definición de producto cruz, tenemos:

$$\vec{n_\pi} = \vec{n_{\pi_1}} \times \vec{X_{L_1}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} - 8\,\hat{\mathbf{j}} - 13\,\hat{\mathbf{k}} \Longrightarrow \vec{n_\pi} = (1, -8, -13)$$

Finalmente, tenemos la ecuación del plano π:

$$\pi : (x-1, y+2, z-2) \cdot (1, -8, -13) = 0 \Longrightarrow 1(x-1) - 8(y+2) - 13(z-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x - 1 - 8y - 16 - 13z + 26 = 0 \Longrightarrow x - 8y - 13z + 9 = 0$$

$$\boxed{\pi : x - 8y - 13z = -9}$$

23. *Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones simétricas*

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$$

y es perpendicular al plano de ecuación

$$\pi_1 : 3x + 2y - z = 5$$

Solución: Hallamos la ecuación general de la recta

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -3\lambda - 3 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

$$L_1 : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) = (1, -3, 2) + \lambda(2, -3, 2) \, , \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Hallamos el vector normal de π_1

$$\pi_1 : 3x + 2y - z = 5 \Longrightarrow \vec{n_{\pi_1}} = (3, 2, -1)$$

Luego, si la recta L_1 está contenido en el plano de interés, entonces el vector director $\vec{X_{L_1}} = (2, -3, 2)$ pertenece al plano. Por otra parte, buscamos que este plano sea perpendicular al plano π_1, que es equivalente a que sea perpendicular al vector normal $\vec{n_{\pi_1}}$.

Como bien sabemos, necesitamos un vector normal y un punto por el que pase nuestro plano. Ese vector normal debe ser perpendicular a $\vec{X_{L_1}}$ y a $\vec{n_{\pi_1}}$ y debe contener al punto $P = (1, -3, 2)$. Así:

$$\vec{n} = \vec{X_{L_1}} \times \vec{n_{\pi_1}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3-4)\hat{\mathbf{i}} - (-2-6)\hat{\mathbf{j}} + (4+9)\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} + 13\hat{\mathbf{k}}$$

Finalmente, la ecuación del plano es:

$$\pi : (-1, 8, 13) \cdot (x-1, y+3, z-2) = 0 \Longrightarrow -(x-1) + 8(y+3) + 13(z-2) = 0$$

$$\Longrightarrow -x + 1 + 8y + 24 + 13z - 26 = 0 \Longrightarrow -x + 8y + 13z - 1 = 0$$

$$\boxed{\pi : x - 8y - 13z = -1}$$

24. *Dados el plano*

$$\pi : x + y + mz = n \quad m, n \in \mathbb{R}$$

y la recta de ecuaciones simétricas

$$3 - x = y = -\frac{z}{2}$$

(a) Calcule m y n para que π y L sean paralelos pero $L \notin \pi$

(b) Calcule m y n para que $L \in \pi$

Solución: Veamos que, independientemente del caso que se analice, la recta L tiene que ser paralela al plano π, ya que en el caso *(a)* se pida que sean paralelos y en el *(b)* que la recta pertenezca al plano (que es equivalente a decir que sean paralelos).

Luego, hallamos la ecuación general de la recta L:

$$\begin{cases} 3 - x = \lambda & \Longrightarrow \quad x = 3 - \lambda \\ \quad y = \lambda & \Longrightarrow \quad y = \lambda \\ -\frac{z}{2} = \lambda & \Longrightarrow \quad z = -2\lambda \end{cases}$$

$$L : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(-1, 1, -2) \, , \, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$P = (3, 0, 0) \, , \, \vec{X_L} = (-1, 1, -2)$$

De una fácil inspección a la ecuación del plano π tenemos que el vector normal es:

$$\vec{n_\pi} = (1, 1, m)$$

Por otra parte, debe satisfacerse para ambos casos que:

$$\vec{n_\pi} \cdot \vec{X_L} = 0 \Longrightarrow (1, 1, m) \cdot (-1, 1, -2) = 0 \Longrightarrow -1 + 1 - 2m = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Si $L \in \pi$, entonces el punto P de la recta L debe satisfacer la ecuación del plano π. Así:

$$\pi : 3 + 0 + 0 \cdot 0 = n \Longrightarrow n = 3$$

Finalmente, tenemos que:

(a) π y L sean paralelos pero $L \notin \pi$ debe satisfacerse que:

$$\boxed{m = 0 \wedge n \neq 3}$$

(b) $\pi \in L$ debe cumplirse que:

$$\boxed{m = 0 \wedge n = 3}$$

25. Determine la ecuación del plano que contiene a las rectas de ecuaciones:

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 - 4s \\ y = 4 + 6s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 10s \end{cases}$$

Solución: Hallamos la ecuación general de las rectas L_1 y L_2

$$L_1 : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y, z) = (3, 4, -7) + \lambda(-2, 3, 5)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \Longrightarrow \vec{X_{L_1}} = (-2, 3, 5)\,,\ P = (3, 4, -7)$$

$$L_2 : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y, z) = (2, 4, 0) + \lambda(-4, 6, 10)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \Longrightarrow \vec{X_{L_2}} = (-4, 6, 10)\,,\ Q = (2, 4, 0)$$

Note que ambas rectas son paralelas ya que $\vec{X_{L_2}} = 2\vec{X_{L_1}}$. Por lo tanto, debemos hallar otro vector linealmente independiente que pertenezca al plano. Para ello, tomamos los puntos P y Q, que también son parte del plano, y fabricamos un vector:

$$\vec{PQ} = Q - P = (2, 4, 0) - (3, 4, -7) = (-1, 0, 7)$$

Entonces, tenemos dos vectores pertenecientes al plano, $\vec{PQ}$ y $\vec{X_{L_1}}$, y un punto por el cual pasa, P o Q. Tenemos todos los elementos para construir la ecuación del plano π.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n_\pi} = \vec{X_{L_1}} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (21 - 0)\hat{\mathbf{i}} - (-14 + 5)\hat{\mathbf{j}} + (0 + 3)\hat{\mathbf{k}} = 21\,\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

Construimos la ecuación del plano π, con el $\vec{n_\pi}$ y el punto P:

$$\pi : (21, 9, 3) \cdot (x - 3, y - 4, z + 7) = 0 \Longrightarrow 21(x - 3) + 9(y - 4) + 3(z + 7) = 0$$

$$\Longrightarrow 21x - 63 + 9y - 36 + 3z + 21 = 0 \Longrightarrow 21x + 9y + 3z = 78$$

Finalmente, tenemos que:

$$\boxed{7x + 3y + z = 26}$$

8 Espacios y Subespacios Vectoriales

26. *Sea el siguiente subespacio vectorial* $W = \{A \in M_{3x3}(\mathbb{R})\,,\, a_{ij} \in \mathbb{R} \,:\, a_{11} = 2a_{13} + 1\}$, *definido con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar usuales de las matrices. Diga si es o no un subespacio vectorial.*

Solución: Para resolver el problema, partiremos del siguiente enunciado: Todo subespacio K $\subset$ V NO VACIO de un espacio vectorial V contiene al elemento neutro del espacio V.
Por lo tanto, W debe contener al elemento neutro del espacio "más grande" $V = M_{3x3}(\mathbb{R})$, que sería la matriz nula de tamaño 3x3.
Veamos si

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Por condición del subespacio W tenemos que: $a_{11} = 2a_{13} + 1$. Pero, de la matriz 0 vemos que: $a_{11} = a_{13} = 0$. Luego:

$$0 = 2(0) + 1 \Longrightarrow 0 = 1$$

lo cual es **FALSO**

Así, como el subespacio W no contiene al elemento neutro del espacio V, podemos concluir que W **NO ES UN ESPACIO VECTORIAL.**

27. *Diga si*

$$V = \left\{ A \in M_{3x3}(\mathbb{R}) \,:\, A = \begin{pmatrix} a & 5 \\ b & c \end{pmatrix} a\,,\, b\,,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un espacio vectorial con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar de matrices.

Solución: Sean:

$$A = \begin{pmatrix} a & 5 \\ b & c \end{pmatrix}\,,\, B = \begin{pmatrix} d & 5 \\ e & f \end{pmatrix}\,,\, C = \begin{pmatrix} g & 5 \\ h & i \end{pmatrix} \in V \,\wedge\, \alpha\,,\, \beta \in \mathbb{R}$$

Primer Axioma: Si $A\,,\,B \in V \Longrightarrow A + B \in V$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & 5 \\ \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 5 \\ \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 10 \\ \\ b+e & c+f \end{pmatrix}$$

Pero, cualquier elemento del espacio V es de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 5 \\ \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz $A + B \notin V$. Así, V **NO ES UN ESPACIO VECTORIAL.**

28. *Diga si*

$$V = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3\,,\, y_1 + y_2 + 3)\big\}$$

es un espacio vectorial con la nueva regla de adición y la usual operación de multiplicación por un escalar.

Solución: Sean

$$(x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2)\,,\,(x_3, y_3) \in V \ \wedge\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Quinto Axioma: Existe un elemento en V, denotado como $\vec{0}$, llamado vector cero o nulo, tal que:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall\, \vec{u} \in V$$

En nuestro caso:

$$(x_1, y_1) + (0_x, 0_y) = (x_1 + 0_x + 3, y_1 + 0_y + 3) = (x_1, y_1) \Longrightarrow \begin{cases} 0_x = -3 \\ \\ 0_y = -3 \end{cases} \Longrightarrow \vec{0} = (-3, -3)$$

Sexto Axioma: Existe un elemento en V, denotado por $-\vec{u}$, y llamado inverso aditivo de $\vec{u}$ tal que:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \quad \forall\, \vec{u} \in V$$

En nuestro caso:

$$(x_1, y_1) + [-(x_1, y_1)] = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (x_1 + (-x_1) + 3, y_1 + (-y_1) + 3) = (3, 3) \neq (-3, -3) = \vec{0}$$

Por lo tanto:

$$(x_1, y_1) + [-(x_1, y_1)] \neq \vec{0}$$

Finalmente, podemos concluir que V **NO ES UN ESPACIO VECTORIAL.**

29. *Diga si*

$$H = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \right\}$$

es un subespacio vectorial de $C_{[0,1]}(\mathbb{R})$ *con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de funciones de variable real usuales.*

Solución: Sean

$$f\,,\, g\,,\, h \in H\ \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Primer Axioma:</u> Si

$$f\,,\, g \in H \Longrightarrow (f+g) \in H$$

$$\int_0^1 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 1 = 2$$

pero, para que $(f+g)(x) \in H$ debe satisfacerse que:

$$\int_0^1 (f+g)(x)\mathrm{d}x = 1$$

Luego, podemos concluir que H **NO ES UN SUBESPACIO VECTORIAL**

Nota: También pudo haberse utilizado el teorema de la existencia del elemento neutro de las funciones de variable real $f \in C_{[0,1]}(\mathbb{R})$, el cual es la función $0(x) = 0$, la cual, claramente no satisface la condición del subespacio H

$$\int_0^1 0(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0 \neq 1 \Longrightarrow 0(x) \notin H$$

30. *Sea*

$$W = \{A \in M_{nxn}, a_{ij} \in \mathbb{R} : A \ \textit{es invertible}\}$$

Diga si W es un subespacio vectorial de las matrices de coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar.

Solución: Usamos el teorema de la existencia del elemento neutro del espacio vectorial que contiene al posible subespacio. El elemento neutro de las matrices de coeficientes reales es la **matriz nula**.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que la matriz nula no pertenece al subespacio W, ya que no es una matriz invertible. Por lo tanto, W **NO ES UN SUBESPACIO VECTORIAL.**

31. *Diga si*

$$V = \left\{p(x) \in P_3 : p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4\right\}$$

es un espacio vectorial, con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar de las funciones polinómicas.

Solución: Sean

$$f\ ,\ g\ ,\ h \in V \wedge \alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Primer Axioma: Si

$$f\ ,\ g \in V \Longrightarrow (f+g) \in V$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + 4) + (c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + 4) \\ &= (b_3 + c_3)x^3 + (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (4 + 4) \\ &= (b_3 + c_3)x^3 + (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + 8 \end{aligned}$$

Pero, para que $(f+g) \in V$ el polinomio debe ser de la forma:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$$

Aquí se ve que el coeficiente independiente tiene un valor constante de 4, mientras que la suma de dos elementos pertenecientes a V tiene como coeficiente independiente el valor de 8. Por lo tanto, podemos concluir que V **NO ES UN ESPACIO VECTORIAL.**

32. *Diga si*

$$H = \left\{ A \in M_{3x3} : A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $M_{3x3}(\mathbb{R})$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar.

Solución: Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} g & h & j \\ 0 & i & k \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \in H \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Primer Axioma:</u> Si

$$A, B \in H \Longrightarrow A + B \in H$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & j \\ 0 & i & k \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+j \\ 0 & d+i & e+k \\ 0 & 0 & f+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego, como la matriz $A+B$ sigue conservando la estructura de matriz triangular superior, entonces concluimos que:

$$A + B \in H$$

Segundo Axioma: Si
$$A \in H \Longrightarrow \alpha A \in H$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ 0 & \alpha d & \alpha e \\ 0 & 0 & \alpha f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

De la misma forma, la matriz αA es del tipo de una matriz triangular superior. Por lo tanto:

$$\alpha A \in H$$

Entonces, podemos concluir que H **ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE** $M_{3x3}(\mathbb{R})$.

33. *Diga si*
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0 \right\}$$
es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ *con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar.*

Solución: Sea
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in H \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

Primer Axioma: Si
$$\vec{v}, \vec{w} \in H \Longrightarrow \vec{v} + \vec{w} \in H$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Para pertenecer al subespacio H este elemento debe satisfacer que:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$$

Pero, como los elementos $\vec{v}$, $\vec{w} \in H$, entonces tenemos:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$
$$\Longrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\vec{v} + \vec{w} \in H$$

Segundo Axioma: Si

$$\vec{v} \in H \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\vec{v} \in H$$

$$\alpha\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

De la misma forma, para que este elemento pertenezca a H debe cumplir que:

$$(\alpha x_1) + (\alpha y_1) + (\alpha z_1) = 0$$

Pero, tenemos que, por $\vec{v} \in H$:

$$(\alpha x_1) + (\alpha y_1) + (\alpha z_1) = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$
$$\Longrightarrow (\alpha x_1) + (\alpha y_1) + (\alpha z_1) = 0$$

Finalmente, decimos que:

$$\alpha\vec{v} \in H$$

Entonces, podemos concluir que H **ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE** $\mathbb{R}^3$

9 Combinación Lineal

34. *Diga si los vectores*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes

Solución: Sea $V = \mathbb{R}^3$ el espacio vectorial de los elementos a considerar. Para determinar si son LI debemos encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta & = 0 \\ \alpha + \gamma & = 0 \\ 3\alpha + \beta - \gamma & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_2]{F_2 \to -\frac{2}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)$$